



Модели оптимального планирования

Постановка задачи планирования

- Имеются некоторые плановые показатели: x , y и другие.
- Имеются некоторые ресурсы: $R1$, $R2$ и другие, за счет которых эти плановые показатели могут быть достигнуты. Эти ресурсы практически всегда ограничены.
- Имеется определенная стратегическая цель, зависящая от значений x , y и других плановых показателей, на которую следует ориентировать планирование.

Оптимальное планирование – определение значений плановых показателей с учетом ограниченности ресурсов при условии достижения заданной цели.



Пример



Школьный кондитерский цех готовит пирожки и пирожные. В силу ограниченности емкости склада за день можно приготовить в совокупности не более **700** изделий. Рабочий день в кондитерском цехе длится **8** часов.

Если выпускать только пирожные, за день можно произвести не более **250** штук, пирожков же можно произвести **1000**, если при этом не выпускать пирожных.

Стоимость пирожного вдвое выше, чем пирожка. Требуется составить дневной план производства, обеспечивающий кондитерскому цеху наибольшую выручку.



Исходные данные

Плановыми показателями являются:

- x — дневной план выпуска пирожков;
- y — дневной план выпуска пирожных.



Ресурсы производства:

- длительность рабочего дня — 8 часов;
- вместимость складского помещения — 700 мест.

Предполагается для простоты, что другие ресурсы (сырье, электроэнергия и пр.) не ограничены.

Формализация

Пусть:

- t – время на 1 пирожок
- $4t$ – на 1 пирожное

Суммарное время приготовления x пирожков и y пирожных:

$$tx + 4ty = t(x + 4y)$$

Это время не может быть больше длительности рабочего дня:

$$t(x + 4y) \leq 8 \cdot 60;$$

$$t(x + 4y) \leq 480;$$



Формализация

За рабочий день может быть изготовлено 1000 пирожков, тогда время его изготовления $480 / 1000 = 0,48$ минут. Получаем:

$$\begin{aligned}(x+4y) \cdot 0,48 &\leq 480; \\ x+4y &\leq 1000;\end{aligned}$$



Общее количество изделий $x+y \leq 700$. Получаем систему:

$$\begin{cases} x+4y \leq 1000; \\ x+y \leq 700; \\ x \geq 0; \\ y \geq 0; \end{cases}$$

(1)

Целевая функция

Стратегическая цель: получение максимальной выручки (*выручка — стоимость всей проданной продукции*). Допустим:

- r — цена одного пирожка (руб.);
- $2r$ — цена пирожного одного (руб);

Стоимость всей продукции:



$$F(x, y) = rx + 2ry = r(x + 2y)$$

Постольку, поскольку r является константой, тогда:

$$F(x, y) = x + 2y \quad (2)$$

Оптимальный план

Математическая дисциплина, которая посвящена решению таких задач, называется математическим программированием.



Получение оптимального плана свелось к следующей математической задаче: найти значения плановых показателей x и y , удовлетворяющих системе неравенств (1), при которых целевая функция (2) принимает максимальное значение.

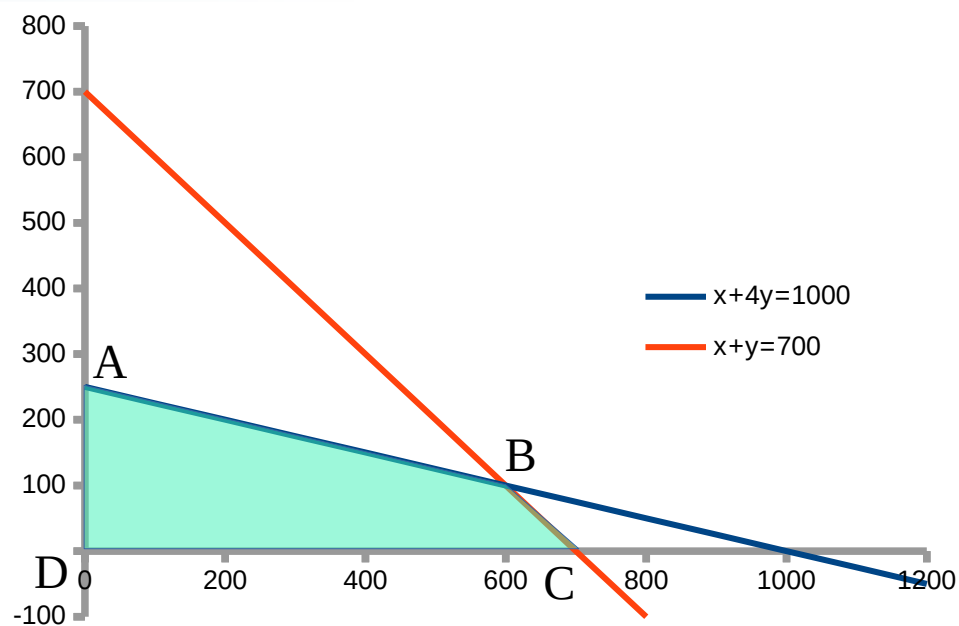
Система написанных ранее неравенств представляется на координатной плоскости четырехугольником, ограниченным четырьмя прямыми, соответствующими линейным уравнениям:

$$x+4y = 1000;$$

$$x+y = 700;$$

$$X = 0; \text{ (ось } Oy)$$

$$y = 0; \text{ (ось } Ox)$$



Любая точка четырехугольника ABCD является решением системы неравенств. Искомое решение, та точка, в которой целевая функция максимальна.

Решение

- В результате решения задачи с помощью электронных таблиц получается следующий оптимальный план дневного производства кондитерского цеха: нужно выпускать 600 пирожков и 100 пирожных.
- Эти плановые показатели соответствуют координатам точки В. В той точке значение целевой функции $f(600,100) = 800$. Если один пирожок стоит 5 рублей, то полученная выручка составит 4000 рублей.

Задание на дом:

§ 20